Differentialgeometrie

M. Fuchs

(Sommersemester 2020)

Vorlage: Manfredo do Carmo,
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen,
Vieweg Verlag

bzw. ....., Differential Geometry of Curves and
Surfaces, Prentice-Hall

Kapitel 0 Einleitung

Die Vorlesung sollte eigentlich als "Elementare Differentialgeometrie" bezeichnet werden, denn sie widmet sich fast ausschließlich dem Studium von

Kurven und Flächen im Raum $\mathbb{R}^3$.

Dabei unterscheidet man zwischen lokalen und globalen Aussagen: Beispielsweise werden wir in natürlicher Weise das Krümmungsverhalten von Flächen lokal in der Nähe eines Punktes definieren oder die sogenannte lokale kanonische Darstellung von Kurven in $\mathbb{R}^3$ kennenlernen. Ein globaler Satz ist dagegen die folgende Charakterisierung von Sphären im Raum:

> Ist S eine kompakte, zusammenhängende, reguläre Fläche mit konstanter Gauß-Krümmung, so ist S eine Sphäre.

Hier ermöglicht also die Information über das Verhalten der <u>lokalen</u> Größe "Gauß-Krümmung" eine präzise Beschreibung der globalen Gestalt der Fläche.

Etwas abstrakter formuliert handelt es sich bei den von uns untersuchten Kurven und Flächen um 1- bzw. 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, insbesondere haben wir damit in jeder Tangentialebene an eine Fläche in natürlicher Weise ein Skalarprodukt (, nämlich Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts). Zu jeder Tangentialebene existiert ein bis auf das Vorzeichen eindeutiger Normalenvektor, und die lokale Änderungsrate des Normalenfeldes misst anschaulich die Krümmung der Fläche. M. a. W.: <u>Im Rahmen unserer Betrachtungen werden alle geometrischen Größen von der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ induziert</u>.

Eine leichte Verallgemeinerung würde sich ergeben, wenn man $\mathbb{R}^3$ mit einem anderen Skalarprodukt versieht. Ein deutlich größerer Grad an Allgemeinheit liegt vor, wenn dieses Skalarprodukt (stetig) vom Punkt abhängen darf. In der <u>Riemannschen Geometrie</u> trennt man sich zunächst ganz von einem umgebenden Raum, d.h. man betrachtet n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer differenzierbaren Struktur, erklärt damit Tangentialräume in jedem Punkt und verlangt schließlich, dass man diese Tangentialräume in vernünftiger Weise zu Skalarprodukträumen machen kann. Dies wiederum ermöglicht die Entwicklung geometrischer Begriffe, allerdings ist hierzu ein sehr großer formaler Aufwand nötig, was den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde.

Kapitel I Kurventheorie

§ 1 Grundbegriffe und Beispiele

Definition: Eine differenzierbare Kurve (genauer: eine parametrisierte diff'bare Kurve) ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$; $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $n \geq 2$.

Bemerkungen: 1.) Das Wort "diff'bar" hat hier eine andere Bedeutung als in der Analysis, wo man damit nur die Existenz der ersten Ableitung meint. Für die meisten Betrachtungen kommen wir mit C^2 (= 2 mal stetig diff'bar) aus.

2.) $n = 2$ $\rightsquigarrow$ parametrisierte Kurve in der Ebene

$n = 3$ $\rightsquigarrow$ -"- Raumkurve

3.) Die Kurve α ist nicht zu verwechseln mit der

Punktmenge $\quad \operatorname{Spur} \alpha = \{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$.

Die Spur repräsentiert den Verlauf der Kurve "optisch", man hat aber keinerlei Information, wo $(= \alpha(t))$ man sich zur Zeit $t \in I$ mit welcher Geschwindigkeit $(= \alpha'(t))$ bewegt. Die Parametrisierung ist ein Fahrplan für Spur α.

4.) Ist $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, so nennt man

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \quad (\text{oft auch } \dot{\alpha}(t))$$

den Tangentenvektor (oder Geschwindigkeitsvektor) der Kurve α bei t.

Sei $t_0 \in I$ und $\alpha'(t_0) \neq 0$. Dann beschreibt

$$\boxed{\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t_0)}$$

eine Gerade mit Richtung $\alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^n$, die zur

Zeit t_0 durch den Punkt $\alpha(t_0)$ geht. Man nennt diese Gerade <u>die Tangente an die Kurve α in</u> t_0.

Ist $t_0 \in I$ <u>ein singulärer Punkt von</u> α, d.h. per Definition $\alpha'(t_0) = 0$, so degeneriert obige Abbildung zur konstanten Funktion $t \mapsto \alpha(t_0)$, die geometrische Vorstellung einer Tangente als Gerade geht verloren. Deshalb betrachtet man in der Differentialgeometrie meist nur folgende Klasse:

<u>Definition:</u> Eine Kurve (natürlich diff'bar!) $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>regulär</u>, falls gilt:

$$\boxed{\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.}$$

Es gibt also keine singulären Punkte.

<u>Bemerkung:</u> Für reguläre Kurven misst man, wie schnell die Tangente lokal bei t_0 ihre Lage variiert und nimmt

dies als Maß dafür, wie stark die Kurve bei t_0 gekrümmt ist.

Beispiele :

① Gerade in $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto (at+b, ct+d)$

mit gegebenen Werten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Tangentenvektor in t : $(a, c) \in \mathbb{R}^2$

Es liegt also eine reguläre Kurve vor, falls $(a,c) \neq (0,0)$.

② Kreislinie in $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) = e^{it}$

Tangenvektor $i e^{it}$ hat überall Länge 1

(= konstante Geschwindigkeit), die Kurve ist überall regulär, jeder Punkt wird ∞ oft durchlaufen.

Spur $= S^1 := \{ z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

Offenbar haben

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) := e^{it},$$

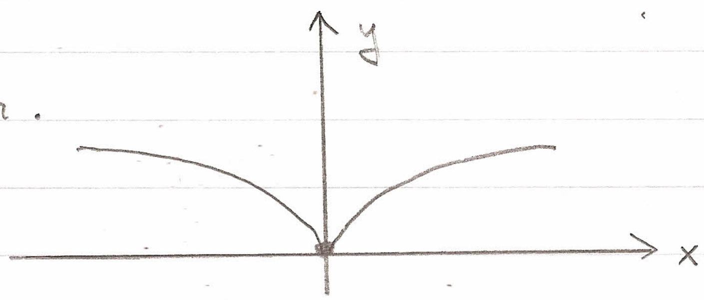
$$\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) := e^{2it},$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := e^{-it}$$

alle S^1 als Spur. Die Parametrisierung β hat die doppelte Geschwindigkeit von α ($\beta'(t) = 2i\,e^{it} \Rightarrow |\beta'(t)| \equiv 2 = 2 \cdot |\alpha'(t)|$), bei γ wird S^1 entgegengesetzt zum Durchlaufsinn von α passiert.

③ $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (t, |t|)$, ist <u>keine differenzierbare Kurve</u>,

④ die <u>Neil'sche Parabel</u> $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (t^3, t^2)$ hingegen schon.



Sie erfüllt mit $x = x(t) = t^3$, $y = y(t) = t^2$

die Gleichung $y^3 = x^2$ $\quad (\Leftrightarrow y = |x|^{2/3})$,

d.h. ihre Spur ist der Graph der reellen Funktion

$x \mapsto |x|^{2/3}$. Dieser Graph hat in $(0,0)$ eine "Spitze",

augenscheinlich existiert keine Tangente, und dies

entspricht dem Umstand, dass $t = 0$ <u>singulärer Punkt</u>

von α ist. Bei $t \to 0$ wird $|\alpha'(t)|$ immer

kleiner, so dass <u>die Spitze mit Geschwindigkeit 0</u>

<u>durchlaufen wird.</u>

⑤ <u>Logarithmische Spirale</u>: Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

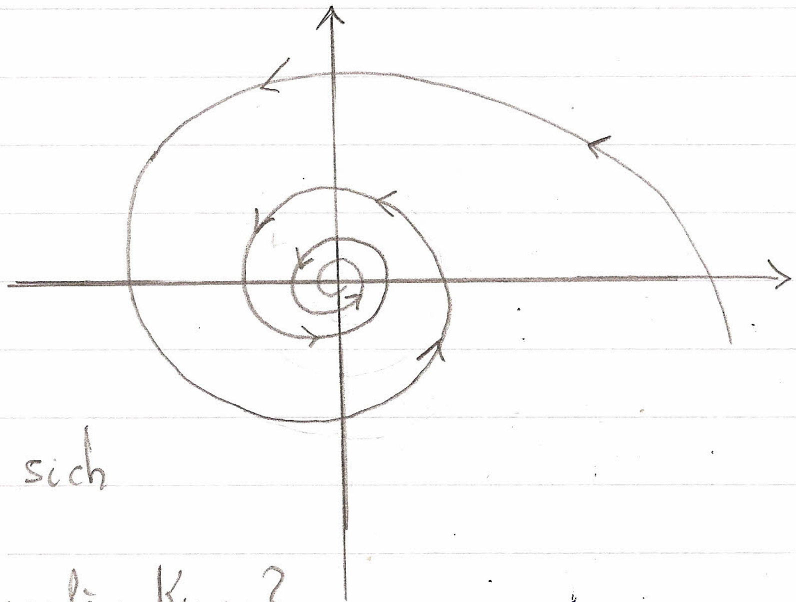
$\alpha(t) := (a \cdot e^{bt} \cos t, \; a e^{bt} \sin t)$, mit

Konstanten $a > 0$, $b < 0$. Die Anteile $\cos t$,

$\sin t$ beschreiben eine Bewegung um $(0,0)$, die

sich bei $t \to \infty$ auf Grund des Anteils e^{bt} mit

$b < 0$ immer enger zusammenzieht, bei $t \to -\infty$ dagegen immer weiter von $(0,0)$ entfernt.



Handelt es sich um eine reguläre Kurve?

⟨ <u>Übungen:</u> weitere Bsple. für parametrisierte Kurven, vgl. Do Carmo, p. 7, 4. und 5. ⟩

$\square$

Bis jetzt haben wir im Sinne der Definition "Kurven" als Abbildungen $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ angesehen. In der Praxis hat man es oft mit "1-dimensionalen" Punktmengen in $\mathbb{R}^n$ zu tun, die noch gar nicht parametrisiert